Feruzan Ay (ayferuzan@yahoo.de)
Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

SS 2003
18. 5. 2003

Lösungen zum 2. Übungsblatt
Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker

Lösung zu Aufgabe 1:

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = 12$. $V = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $n = 12$ sei die Knotenmenge, wobei x_1 den Sammeltank repräsentiert, $x_2, \ldots, x_{b+1}$ repräsentiert b Bohrtürme (es wird angenommen, das es mindestens ein Bohrturm gibt). $x_{b+2}, \ldots, x_n$ sind die Verbindungsbauteile (in der Aufgabenstellung mit "andere Bauteile" bezeichnet). G ist zusammenhängend und kreisfrei ("sparsam gebaut"). Folgende Gleichungen sind in G gültig:

$$\begin{aligned}
& |V| = n \geq 2 \\
& |\{\{x_1, x_s\} \in E | 2 \leq s \leq n\}| = 1 \\
\text{Für jedes feste } k,\ 2 \leq k \leq b+1: \quad & |\{\{x_k, x_m\} \in E | m = 1 \text{ oder } b+2 \leq m \leq n\}| = 1 \\
\text{Für ein festes } k,\ b+2 \leq k \leq n: \quad & |\{\{x_k, x_m\} \in E | 1 \leq m \leq n\}| \leq 3
\end{aligned}$$

  Damit sind alle möglichen Graphen spezifiziert.

  - Aufgabe 1b: Geben Sie einen zusammenhängenden und kreisfreien Graph mit $n = 12$ und $b = 6$ an, der die obigen Gleichungen erfüllt.
  - Aufgabe 1c: Zeigen Sie allgemein, dass für alle zusammenhängenden und kreisfreien Graphen mit $|V| = n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, der die obigen Gleichungen erfüllt, auch die Bedingung
  $$b \leq \frac{n}{2}$$
  gilt.

- Siehe Abbildung 1

- Sei b die Anzahl der Bohrtürme, r die Anzahl der Verbindungsbauteile. Es muss gelten: $|V| = b + r + 1$ und $|V|$ gerade (das eine Bauteil ist der Sammeltank). Da $b > \frac{|V|}{2}$ ist, muss gelten: $b > r + 1$ daher auch $r < \frac{|V|}{2} - 1$. Wir betrachten zuerst nur die Verbindungsbauteile und beweisen das jedes aus r Verbindungsbauteilen bestehende zusammenhängende und kreisfreie Rohrsystem maximal $r + 2$ Anschlüsse "nach Aussen" besitzt. Der Beweis erfolgt durch Induktion:

  - Induktionsbehauptung: Jedes zusammenhängende, kreisfreie Rohrsystem aus r Verbindungsbauteilen besitzt maximal $a := r + 2$ Anschlüsse.
  - Induktionsanfang: Sei $r = 1$, dann ist offensichtlich, dass drei andere Bauteile angeschlossen werden können, also $a = r + 2 = 3$.
  - Induktionsbeweis: Sei ein beliebiges Rohrsystem gegeben, für das die Induktionsbehauptung gilt. Wir fügen ein Verbindungsbauteil hinzu. Dies kann nur an einer Anschlußstelle geschehen und es darf nur eine einzige Verbindung zum neuen Bauteil geben (kreisfrei). Wir verringern damit die Anschlußstellenanzahl a um eins. Das Hinzufügen

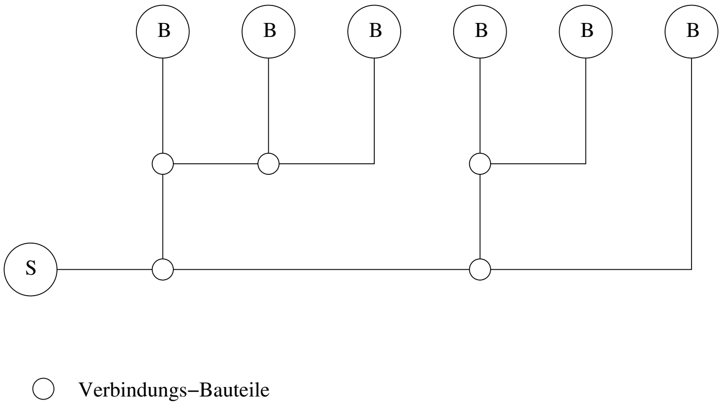

Abbildung 1: Möglicher Bauplan für sechs Bohrtürme

des neuen Verbindungsbauteils bringt jedoch zwei neue Anschlußstellen dazu (beziehungsweise drei, von denen eine aber sofort verbunden ist). Sei $a_{alt} = r_{alt} + 2$, so ist $a_{neu} = a_{alt} - 1 + 2 = r_{alt} + 2 - 1 + 2 = r_{neu} + 2$, was zu zeigen war.

– Induktionsschluss: Die Behauptung gilt für alle Rohrsysteme.

Jetzt lässt sich die Aufgabenstellung leicht lösen. Da $r < \frac{|V}{2} - 1$ ist, stehen höchstens $a < \frac{|V|}{2} - 1 + 2 = \frac{|V|}{2} + 1$ Anschlussstellen für die Bohrtürme und den Sammeltank zur Verfügung. Aber alleine die Bohrtürme brauchen $b > \frac{|V|}{2}$ Anschlussstellen, also $a < b$, daher gibt es für jedes die Bedingungen erfüllende Rohrsystem keine Möglichkeit alle Bauteile zu verbinden. □

Lösung zu Aufgabe 2:

- Richtung: $i) \Rightarrow ii)$

  Enthalte G keinen Kreis ungerader Länge. Sollte G aus mehr als einer Zusammenhangskomponente bestehen, so können wir diese einzeln betrachten: O.B.d.A sei G zusammenhängend.

  Sei $v \in V$, dann gibt es von jedem Knoten in V einen Weg nach v. Man definiert:

  $$A = \{x \in V | dist(v, x) \text{ ist gerade Länge}\}$$
  $$B = \{x \in V | dist(v, x) \text{ ist ungerade Länge}\}$$

  Insbesondere sei $v \in A$.

  Zu Zeigen: A und B bilden ein Bipartition von G. Es ist offensichtlich $A \cap B = \emptyset$ und $V = A \cup B$. Bleibt zu zeigen: $\{\{x, y\} \in E | x, y \in A\} = \emptyset$ und $\{\{x, y\} \in E | x, y \in B\} = \emptyset$ (d.h. es existieren keine Kanten zwischen Knoten aus A (bzw. B)).

  Annahme: Es existiert eine Kante $e = \{x, y\}$ mit $x, y \in A$ und $x \neq y$. $dist(v, x)$ und $dist(v, y)$ sind die Längen der kürzesten Wege von $v \in A$ nach x und von $v \in A$ nach y. Sei z der letzte gemeinsame Knoten dieser beiden Wege von $v \in A$ aus. Also gilt dann:

  $$dist(v, x) = dist(v, z) + dist(z, x)$$
  $$dist(v, y) = dist(v, z) + dist(z, y)$$

  Durch Addition der zwei Gleichung erhält man:

  $$dist(v, x) + dist(v, y) = 2dist(v, z) + dist(z, x) + dist(z, y)$$

da $x, y, v \in A$ sind muss die linke Summe gerade sein. Also muss $dist(z, x) + dist(z, y)$ auch gerade sein. Dann ergeben die Wege von z nach y und von z nach y zusammen mit der Kante $e = \{x, y\}$ einen Kreis ungerader Länge, das führt zum Widerspruch. (Genau so wenn $x, y, v \in B$ wäre).

Also gibt es keine Kante $e = \{x, y\}$ mit $x, y \in A$ (bzw. B). Also ist $A = V_1$ und $B = V_2$ und $A \cap B = \emptyset$ und $V = A \cup B$.

A und B zerlegen V in zwei disjunkte Teilmengen und jede Kante hat einen Endknoten in A und einen Endknoten in B.

- Richtung: $ii) \Rightarrow i)$

  Diese Richtung ist einfacher zu Beweisen. Dazu müssen wir jeden Kreis in G betrachten und beweisen dass er eine gerade Knotenanzahl hat.

  Sei G ein beliebiger Graph für den $ii)$ gilt und sein V_1, V_2 zwei disjunkte Teilmengen wie in $ii)$ formuliert. Jetzt sei C ein beliebiger Kreis in G. Der Startknoten von C liegt entweder in V_1 oder V_2. Jeder folgende Knoten muss abwechselnd in V_1 oder V_2 liegen, da keine Kanten innerhalb dieser beiden Knotenmengen existieren. Da ein Kreis aber geschlossen ist, muss die Kantenfolge irgendwann in der Knotenmenge enden, in der sie begonnen hat, also dort wo der Startknoten lag. Da immer jede zweite Kante in der Startknoten-Teilmenge endet, muss die Gesamtkantenanzahl in C gerade sein. Da dies für beliebige C in G gilt, gilt $i)$ und damit $ii) \Rightarrow i)$.

Damit folgt: $i) \Leftrightarrow ii)$.

Lösung zu Aufgabe 3:

Sei $E_1 = E' \setminus (E' \cap E'')$ und $E_2 = E'' \setminus (E' \cap E'')$. Nachgewiesen werden muss, dass es immer möglich ist, bei jedem Zwischenschritt, also bei jedem $G_{i=0..k-1}$ ein $e_1 \in E_1$ zu enfernen, ein $e_2 \in E_2$ hinzuzufügen und dabei die Baumeigenschaft aufrecht zu erhalten.

Durch das Entfernen der Kante e_1 wird der Graph G_i in zwei Komponenten zerteilt, da es aufgrund der vorher schon bestehenden Baumeigenschaft keine Kreise gibt, also keinen alternativen Weg zwischen den zu der entnommenen Kante adjazenten Knoten. Da G'' ebenfalls Baum ist und somit zusammenhängend, muss es immer genau ein $e \in E_2$ geben, so dass die beiden Komponenten wieder zusammenhängend sind. Durch Einfügen von e erhält man wieder einen Baum, da kein Kreis entstanden sein kann, denn die beiden Komponenten hingen vorher nicht zusammen. Der nun entstandene Teilgraph ist G_{i+1}.

Da so bei jedem Schritt genau ein Element aus E_1 entfernt und ein Element aus E_2 hingefügt wird, erhält man nach k Schritten G''.

Damit ist ein Algorithmus gegeben, mit dem die Aufgabenstellung bei jedem beliebigen Graphen erfüllt werden kann. $\square$

Lösung zu Aufgabe 4:

Beweis durch Widerspruch.

Annahme: Es gibt einen ebenen Graphen, der eine chromatische Zahl ≥ 6 besitzt.

Gibt es also mindestens einen solchen Graphen, so sei $G = (V, E)$ ein Graph, der die minimale Anzahl an Knoten besitzt. Das heisst, jeder Graph $G' = (V', E')$, $V' \subset V$, $E' \subseteq E$ und $|V| = |V'| + 1$ ist noch 5-färbbar. Sei $V = V' \cup \{v\}$.

Besitzt dieser Knoten v weniger als fünf Nachbarn, so können wir ihm immer eine Farbe zuweisen, um G fünf-färbbar zu machen. Also besitzt v fünf oder mehr Nachbarn, die unterschiedlich gefärbt sind. Gibt es sechs oder mehr unterschiedlich gefärbte Nachbarknoten von v, so könnte man diese entfernen, denn wenn es keine Farbe für v mit fünf verschieden gefärbten Nachbarknoten gibt, gibt es diese für zusätzliche Nachbarknoten auch nicht. Da wir G als den minimalen Graph gewählt haben, wäre nach dem Entfernen aber die Knotenanzahl geringer, und der Graph wäre fünf-färbbar. Also hat v in G genau fünf verschieden gefärbte Nachbarn.

Sei also $v \in G$ der Knoten, dessen fünf Nachbarn v_1, …, v_5 verschieden gefärbt sind. Die Farbe von v ist die “6. Farbe”. Alle anderen Farben der benachbarten Knoten seien mit F_1 bis F_5 bezeichnet. O.B.d.A. sei angenommen, dass v_1, v_2, … mit F_1, F_2, … gefärbt sind. Die Situation ist in Abbildung 2 dargestellt. Wir wollen zeigen, dass die “6. Farbe” durch Veränderung der Färbung des Graphen immer mit einer der konkreten fünf Farben der Nachbarknoten ersetzt werden kann.

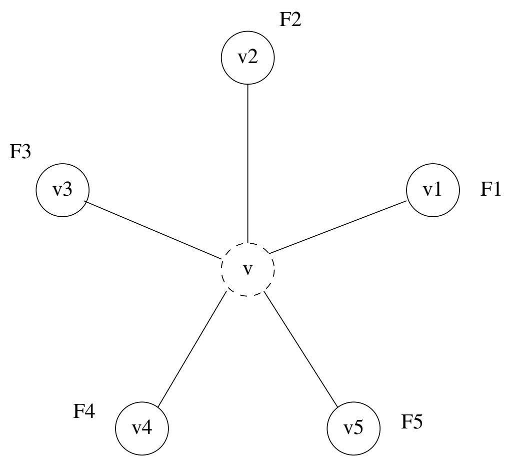

Abbildung 2: Situation mit fünf verschieden gefärbten Nachbarknoten

Wir definieren uns zunächst die Teilgraphen T von $G = (V, E)$:

$$T(f_1, f_2) := (\{x \in V |\; x \text{ mit } f_1 \text{ oder } f_2 \text{ gefärbt } \}, E')$$

Wobei E' nur die Kanten aus E enthält, deren Knoten noch in $T(f_1, f_2)$ vorkommen.
Sei W der Weg zwischen v_1 und v_3 in $T(F_1, F_3)$ der nicht über v führt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- W existiert nicht.

  Wenn es keinen solchen Weg gibt, gibt es in $T(F_1, F_3)$ mindestens zwei Komponenten. Seien K_1 und K_2 die jeweils v_1 und v_3 enthaltenen Komponenten. Da sie in $T(F_1, F_3)$ nicht zusammenhängend sind, lassen sich die Farben F_1 und F_3 in einer der Komponenten austauschen, ohne dass zwei adjazente Knoten dieselbe Farbe bekommen. Also tauscht man F_1 und F_3 in K_3 gegeneinander aus. Damit ist v_3 mit F_1 gefärbt und die Farbe F_3 kann zur Färbung von v genutzt werden. Also ist G 5-färbbar.

- W existiert.

  Wir betrachten alle Knoten, die auf W liegen. Sie bilden zusammen mit v einen Kreis und teilen $T(F_2, F_4)$ in mindestens zwei Komponenten. Seien K_1 und K_2 die jeweils von v_2 und v_4 ausgehenden Komponenten in $T(F_2, F_4)$. Wir vertauschen in einer der beiden Komponenten (z.B. K_2) die Farben F_2 und F_4 gegeneinander aus und verfahren analog wie im Fall das W existiert. Somit erhalten wir wieder eine freie Farbe (z.B. F_4), mit der v gefärbt werden kann. Also ist G 5-färbbar.

Also gilt die Annahme nicht und jeder ebene Graph ist 5-färbbar.

Lösung zur Zusatzaufgabe:

(a) Zunächst werden von jedem Gebiet die angrenzenden Kanten gezählt, wie in Abbildung 3 gezeigt.

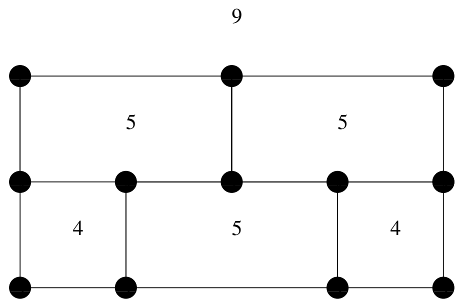

Abbildung 3: Anzahl der an jedes Gebiet angrenzenden Kanten

Nun denke man sich die Gebiete als Knoten und die Anzahl der angrenzenden Kanten als den Grad der Knoten. Da wir drei Knoten mit ungeradem Grad erhalten, ist die Aufgabe nicht lösbar.

(b) Beweis durch Induktion.

- *Induktionsanfang:* Sei G" ein Graph, so dass $|V| = 1$ und $E = \emptyset$. Offensichtlich ist dies ein hinsichtlich der zu beweisenden Aussage gültiger Graph, da über gerade Kantenanzahlen keine Aussage gemacht wird.
- *Induktionsschritt:* Zwischen zwei Knoten x und y wird durch das hinzufügen von Knoten und Kanten genau ein neuer Weg hinzugefügt. Es darf hierbei $x = y$ sein, allerdings muss dann die Länge des eingefügten Weges mindesten 2 sein, da es sich sonst nicht mehr um einen Graphen laut unserer Definition handelt. Auf diese Weise lässt sich jeder beliebige ebene Graph konstruieren.

  Der eingefügte Weg teilt immer ein Gebiet in zwei neue Gebiete, unbeeinflusst davon, ob es sich um das unbeschränkte Gebiet handelt, oder auch der neue Weg als Kreis an einen Knoten gehängt wird.

  Wie leicht zu zeigen ist, entstehen beim Einfügen eines Weges gerader oder auch ungerader Länge in ein Gebiet mit ungerader Kantenzahl immer ein Gebiet mit gerader Kantenzahl und ein Gebiet mit ungerader Kantenzahl. Fügt man den Weg ungerader Länge in ein Gebiet mit gerader Kantanzahl ein, entstehen zwei Flächen mit ungerader Kantenzahl.
  Fügt man einen Weg gerader Längen in ein Gebiet mit gerader Kantenzahl ein, so entstehen wieder zwei Gebiete mit gerader Kantenzahl.

  Das zerteilen eines Gebietes durch einen Weg verletzt also nicht den Zustand des Graphen in Bezug auf die zu beweisende Aussage.
- *Induktionsschluss:* Hiermit ist gezeigt, dass man keinen Graphen bauen kann, der keine Kanten enthält, die an nur ein Gebiet angrenzen, und dabei eine ungerade Anzahl von Gebieten mit einer ungeraden Anzahl von benachbarten Kanten hat.