TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II – Institut für Mathematik
Ekkehard Köhler

Diskrete MAFI
SoSe 2003

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker

Abgabe am 19.5.2003 *vor* der Vorlesung

Aufgabe 1: **2+1+3 Punkte**

Tief in der bayerischen Wüste ist ein Ölbohrfeld errichtet worden. Es besteht aus folgenden Typen von Bauteilen: dem Sammeltank mit einem einzigen Zugang, den Bohrtürmen, die jeder nur einen Auslass haben, und verschiedenen anderen Bauteilen (etwa Relaisstationen, Umlenkschotten, Zwischenpumpen, Brandschotten) von denen jedes maximal drei Anschlüsse hat. Insgesamt wurden 12 solcher Bauteile verwendet. Hinzu kommen Rohre, um die Bauteile zu verbinden. (Die Rohre können in verschiedenen Höhen verlegt werden.) Man kann davon ausgehen, dass das Netz sparsam gebaut wurde, d.h. ließe man ein beliebiges der Rohre weg, wären manche Bauteil nicht mehr mit dem Tank verbunden.

a) Formulieren Sie die Situation und die beiden folgenden Fragen graphentheoretisch!

b) Geben Sie einen möglichen Bauplan mit sechs Bohrtürmen an.

c) Zeigen Sie allgemein, dass unter der Vorraussetzung geradzahlig vieler Bauteile, höchstens die Hälfte von diesen Bauteilen Bohrtürme sein können. (Für den Spezialfall 12 sind also nicht mehr als sechs Bohrtürme möglich.)

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Man beweise, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) G enthält keinen Kreis ungerader Länge (mit einer ungeraden Anzahl Kanten).

ii) Die Knotenmenge V läßt sich in zwei disjunkte Teilmengen V_1 und V_2 zerlegen, so dass jede Kante einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 hat.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $G' = (V', E')$, $G'' = (V'', E'')$ zwei aufspannende Bäume von G, die sich in genau k Kanten unterscheiden, d. h. $|E' \setminus (E' \cap E'')| = |E'' \setminus (E' \cap E'')| = k$. Zeigen Sie, dass es $k + 1$ aufspannende Bäume $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, von G gibt, so daß $G_0 = G'$, $G_k = G''$ und $|E_i \setminus (E_i \cap E_{i+1})| = |E_{i+1} \setminus (E_i \cap E_{i+1})| = 1$, für $i = 0, 1, \ldots, k - 1$.

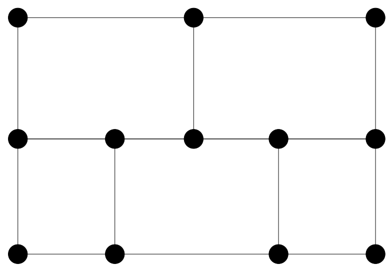
Aufgabe 4: **6 Punkte**

Wir wollen beweisen, dass jeder ebene Graph chromatische Zahl kleiner oder gleich 5 besitzt. Dazu argumentieren wir über den sogenannten kleinsten Verbrecher. Also angenommen unsere Behauptung sei falsch, dann wähle man unter allen ebenen Graphen, die nur mit sechs Farben zulässig gefärbt werden können, einen aus, der die minimale Anzahl an Knoten besitzt. (Warum gibt es diese Graphen unter der Annahme die zum Widerspruch geführt werden soll?)
Zeigen Sie, dass man in diesem Graphen einen Knoten finden könnte, der genau fünf Nachbarknoten besitzt, wobei diese sechs Knoten paarweise verschieden gefärbt sind.

Leiten Sie daraus einen Widerspruch her, indem Sie diejenigen Teilgraphen betrachten, in denen jeweils nur die Knoten zweier Farben liegen! Denken Sie dazu über die Zusammenhangskomponenten dieser Graphen nach! Noch ein Tipp: Nutzen sie die Minimalität des Graphen bezüglich der 6-Färbbarkeit!

Zusatzaufgabe: **2+4 Zusatzpunkte**

a) Man beweise oder widerlege, dass man ein Stück Faden (beliebiger Länge) so auf folgende Zeichnung eines Graphen G legen kann, dass der Faden jede Kante genau einmal schneidet und keinen Knoten berührt.



b) Es sei $G = (V, E)$ ein ebener Graph. Löscht man aus G alle Kanten, die auf dem Rand nur eines Gebiets liegen, so erhält man einen ebenen Teilgraphen G' und die Anzahl der Gebiete bleibt unverändert. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Gebiete, deren Rand von einer ungeraden Anzahl Kanten in G' gebildet wird, gerade ist. (Tipp: Natürlich ist G in Teilaufgabe *b)* ein allgemeiner Graph und nicht etwa der aus *a)*. Aber die Teilaufgaben haben etwas miteinander zu tun!)

Viel Erfolg!