Feruzan Ay (ayferuzan@yahoo.de)
Marco Kunze (makunze@cs.tu-berlin.de)
Sebastian Nowozin (nowozin@cs.tu-berlin.de)

SS 2003
4. 5. 2003

Lösungen zum 1. Übungsblatt
Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker

Lösung zu Aufgabe 1:

Folgende Schlüsse lassen sich aus den Gegebenheiten ziehen:

- Da der Computer des Chefs mit fünf weiteren verkabelt werden soll, muss er sich einer einer Komponente mit mindestens sechs Rechnern befinden.
- Da jeder Computer beim Ausfall von drei Leitungen immernoch mit mindestens einem verbunden sein soll, muss jeder beliebige andere Rechner mit mindestens vier anderen Computern in seiner Komponente verbunden sein, sich somit in einer Komponente mit fünf Computern befinden.
- Da es drei unanbhängige Netze geben soll, müssen die 15 Computer in drei Komponenten zerlegt werden.

Wie leicht ersichtlich ist, hat man nun eine Komponente, die den Chef-Computer enthält und somit mindestens sechs Rechner enthält, sowie zwei weitere Komponenten mit jeweils mindestens fünf Computern, woraus sich eine Mindestanzahl von $6 + 5 + 5 = 16$ Computern ergibt. Da hier aber nur 15 Computer zur Verfügung stehen, lässt sich das Netzwerk nicht realisieren.

Lösung zu Aufgabe 2:

1. Sei G ein zusammenhängender Graph, und W_1, W_2 seien längste Wege in G. Wir beweisen die Behauptung der Aufgabe durch einen Widerspruch. Annahme: Es gibt keinen gemeinsamen Knoten, der sowohl in W_1 als auch in W_2 enthalten ist.

   Es muss $|W_1| = |W_2|$ gelten. Da G zusammenhängend ist, lässt sich eine Kantenfolge T vom Anfangsknoten von W_1 zum Anfangsknoten von W_2 konstruieren. S sei die durch Satz 1.2 auf einen Weg reduzierte Kantenfolge T. S muss dabei W_1 an einem Knoten x verlassen. x teilt damit W_1 in zwei Teile. Der längere Teil wird als U_1 definiert und ist ein Weg vom Anfangs- oder Endknoten hin zu x. S teilt ebenso W_2 und definiert damit einen längeren Teilweg in W_2. Dieser sei mit U_3 bezeichnet und geht vom Anfangs- oder Endknoten von W_2 zu dem Knoten y, bei dem S auf W_2 trifft. Der Teilweg in S, der zwischen x und y liegt, sei U_2. Da W_1 und W_2 keine gemeinsamen Knoten haben (Annahme), muss U_2 mindestens eine Kante enthalten. Durch U_1, U_2 und U_3 definieren wir einen neuen Weg W der durch Aneinanderreihung von U_1, U_2 und U_3 konstruiert wird. Da durch Auswahl des längeren Teilwegs zwingend $|U_1| \geq \frac{|W_1|}{2}$ und $|U_3| \geq \frac{|W_2|}{2}$ gilt, und $|U_2| \geq 1$ ist, gilt für W:

   $$|W| \geq \frac{|W_1|}{2} + 1 + \frac{|W_2|}{2} = |W_1| + 1 = |W_2| + 1$$

   Da $|W_1|$ und $|W_2|$ aber zwei längste Wege in G sind, ist dies offensichtlich ein Widerspruch, da sonst $|W| > |W_1| = |W_2|$ wäre. Die Annahme ist also falsch und es muss einen gemeinsamen Knoten geben.

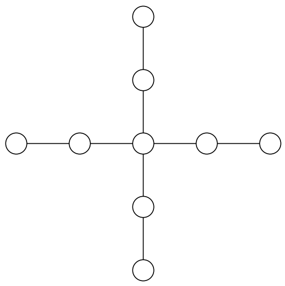

Abbildung 1: Graph für $4 \leq k \leq 7$

2. Wir beschreiben die Konstruktion eines solchen Graphens für ein beliebiges k, $k \geq 4$. Sei $|V|$ in diesem Graphen definiert durch:

$$|V| = k - (k \bmod 4) + 4 + 1$$

Damit wird gewährleistet das $|V| > k$ und $|V| \in \{4n+1 | n \in \mathbb{N}\}$ gilt. Jetzt lässt sich ein kreuzförmiger Graph konstruieren, der die in der Aufgabe genannten Eigenschaften erfüllt. Dabei liegt der Kreuzungsknoten genau in der Mitte und alle "Arme" des Kreuzes haben die gleiche Länge. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.

Lösung zu Aufgabe 3:

Beweis durch Widerlegung des Gegenteils: Es lässt sich kein unzusammenhängender Graph mit $max_{x\in V} d(x) + min_{x\in V} d(x) + 1 = |V|$ konstruieren. Somit lässt sich dann auch kein unzusammenhängender Graph mit $max_{x\in V} d(x) + min_{x\in V} d(x) + 1 \geq |V|$ konstruieren, da man dafür sogar noch Kanten hinzufügen müsste. Folglich sind alle Graphen für die gilt $max_{x\in V} d(x) + min_{x\in V} d(x) + 1 \geq |V|$ zusammenhängend.

Sei G ein unzusammenhängender Graph. Dann lässt sich G in zusammenhängende Komponenten $K_1, K_2, .., K_n$ zerlegen. Die Komponente mit den meisten Knoten sei K_{max}. Nur in dieser Komponente kann ein Grad von $|V_{K_{max}}| - 1$ erreicht werden. Ebenso gilt für die Komponente K_{min}, die die wenigsten Knoten enthält, dass der minimale Grad höchsten $|V_{K_{min}}| - 1$ erreichen kann. Es gilt:

$$max_{x\in V} d(x) \leq |V_{K_{max}}| - 1$$
$$min_{x\in V} d(x) \leq |V_{K_{min}}| - 1$$

Damit gilt für die Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned} max_{x\in V} d(x) + min_{x\in V} d(x) + 1 &\leq |V_{K_{max}}| - 1 + |V_{K_{min}}| - 1 + 1 \\ &= |V_{K_{max}}| + |V_{K_{min}}| - 1 \\ &< |V| \end{aligned}$$

Für jeden unzusammenhängenden Graphen gilt die Ursprungsgleichung nicht. Damit gilt das Gegenteil: die Aussage aus Aufgabe 3.

Lösung zu Aufgabe 4:

- $1 \equiv 2$

  1. $1 \Rightarrow 2$
     Seien $x, y \in V$ und x und y benachbart und e die Kante zwischen x und y. Damit ist e

auch gleichzeitig Weg von x nach y. Laut Definition eines Baumes kann es keinen weiteren Weg von x nach y geben (Kreisfreiheit). Somit gilt $G \backslash e$ ist nicht zusammenhängend, was zu zeigen war.

2. $2 \Rightarrow 1$
   Der Beweis funktioniert quasi äquivalent zum ersten Teil. Aus $G \backslash e$ nicht zusammenhängend für jede Kante e folgt wiederum die Kreisfreiheit, die zusammen mit der Zusammenhängigkeit des Graphen die Definition eines Baumes ergibt.

- $1 \equiv 3$

  1. $1 \Rightarrow 3$
     Da ein Baum per Definition kreisfrei und zusammenhängend ist, kann es nur genau einen Weg von v nach w für $v, w \in V$ geben, da bei keinem Weg die Zusammenhängigkeit verletzt wäre und bei mehr als einem Weg die Kreisfreiheit.
  2. $3 \Rightarrow 1$
     Äquivalent zum ersten Teil: Aus der Existenz genau eines Weges für beliebige Knoten folgt der Zusammenhang des Graphens und die Kreisfreiheit. Beide zusammen sind hinreichend für die Baumeigenschaft.

- $1 \equiv 4$

  1. $1 \Rightarrow 4$
     Sein x, y zwei beliebige Knoten in G für die $\{x, y\} \notin E$ ist. Da G ein Baum ist, existiert bereits ein Weg W_1 zwischen x und y. Fügt man jetzt eine weitere Kante zwischen x und y hinzu, so verbindet man immer zwei Knoten, für die bereits ein Weg existiert. Durch die neue Kante gibt es einen zusätzlichen Weg W_2 mit der Länge 1. Da die Anfangs- und Endpunkte von W_1 und W_2 jeweils übereinstimmen lässt sich immer ein Kreis C konstruieren: an W_1 hängt man die Umkehrung von W_2 an. Da man nur eine Kanten hinzugefügt hat, ist dies der einzige Kreis. Damit ist G maximal zirkelfrei.
  2. $4 \Rightarrow 1$
     Trivial, da Aussage 4 beinhaltet, dass G ein Baum ist.

- $1 \equiv 5$

  1. $1 \Rightarrow 5$
     Wenn G ein Baum ist, ist er automatisch zusammenhängend. Es bleibt zu zeigen, dass die Kantenanzahl zwingend $n - 1$ betragen muss. Nach Satz 1.7 ist dies der Fall und es gilt: $n = |E| = |V| - 1 = n - 1$.
  2. $5 \Rightarrow 1$
     Da G zusammenhängend ist, bleibt die Kreisfreiheit zu zeigen. Da genau $n - 1$ Kanten in G existieren ist $v(G) = 0$. Damit gilt nach der Definition der zyklomatischen Zahl für zusammenhängende Graphen (Skript Seite 15) dass G ein Baum ist (da wir den Zusammenhang sicher wissen ist die Aussage a' eine Äquivalenz).

- $1 \equiv 6$

  1. $1 \Rightarrow 6$
     Nach der Definition der zyklomatischen Zahl gilt: $v(G) = 0$, also $|E| - |V| + 1 = 0 \Rightarrow |E| = |V| - 1 = n - 1$. Die Kreisfreiheit folgt direkt aus den Eigenschaften eines Baums.
  2. $6 \Rightarrow 1$
     Da G keinen Kreis enthält müssen alle Komponenten von G Bäume sein. Es ist zu zeigen, dass nur eine Komponente existiert. Sein K_1, K_2, $\ldots$, K_p die Komponenten

von G. Da diese alle Bäume sind, enthalten sie genau $|E_m| = |V_{K_m}| - 1$ Kanten. Damit gilt:

$$|E| = \sum_{1 \leq m \leq p} |E_m| = \sum_{1 \leq m \leq p} (|V_{K_m}| - 1) = |V| - (p \cdot 1) = |V| - p$$

Nur für $p = 1$ ist die Gleichung erfüllbar und G kann $n - 1$ Kanten haben. Es gibt also nur eine Komponente die ein Baum ist, was zu zeigen war.