TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II – Institut für Mathematik
Ekkehard Köhler

Diskrete MAFI
SoSe 2003

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Diskrete und strukturelle Mathematik für Informatiker

Abgabe am 5.5.2003 *vor* der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Eine Firma möchte ihre 15 Rechner vernetzen. Aus Sicherheitsgründen sollten drei unabhängige Netzwerke entstehen. Ein Rechner kann maximal mit fünf Nachbargeräten direkt verkabelt werden. Um den Chef über die Anschaffung der teuren Netzkarten zu beruhigen, sollen bei seinem Rechner diese fünf Verbindungen tatsächlich ausgeschöpft sein. Weiter muß gewährleistet sein, daß beim Ausfall von irgend drei Verbindungen im Netz jeder Rechner noch mit mindestens einem Rechner in Kontakt ist. Gibt es eine Lösung für diese Firma? (Ausreichende Begründung!)

Aufgabe 2: **2+4 Punkte**

a) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und W_1, W_2 zwei längste Wege in G (unter der Länge eines Weges verstehen wir die Anzahl seiner Kanten). Man beweise oder widerlege die folgende Aussage: Ist G zusammenhängend, so gibt es mindestens einen Knoten, der sowohl in W_1 als auch in W_2 enthalten ist.

b) Man beschreibe für jedes $4 \leq k \in \mathbb{N}$ zusammenhängende Graphen mit mehr als k Knoten und mindestens zwei längsten Wegen, die genau einen Knoten gemeinsam haben.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit

$$\max_{x \in V} d(x) \quad + \quad \min_{x \in V} d(x) \quad + \quad 1 \quad \geqslant \quad |V| \ .$$

Man beweise, daß G zusammenhängend ist.

Aufgabe 4: **8 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n := |V| \geq 2$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. G ist ein Baum.
2. G ist minimal zusammenhängend, d.h. für jede Kante $e \in E$ gilt: $G \backslash e$ ist nicht zusammenhängend.
3. Für irgend zwei Knoten $v, w \in V$ gibt es genau einen Weg von v nach w.
4. G ist maximal zirkelfrei, d.h. G ist ein Baum und für alle Paare $\{x, y\} \notin E, x, y \in V$ enhält $G' = (V, E \cup \{x, y\})$ (genau) einen Zirkel.
5. G ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.
6. G hat $n - 1$ Kanten und keinen Zirkel.

Viel Erfolg!