Theoretische Grundlagen der Informatik II
Sommersemester 2002
Veranstalter: Gunnar Schröter, Kathrin Hoffmann

5. Übungsblatt: Homomorphismen und Termalgebra

Ausgabe: 21.5.2002 **Abgabe: 29.5.2002**

1. **Aufgabe (6 Punkte)**

   Dieses Aufgabe nimmt Bezug auf die Signatur $Keller$ (Stack) vom 3.Übungsblatt. Wir ergänzen die Signatur Keller um die Konstantensymbole $d_0, d_1 :\to Data$ und die Algebra $\mathcal{A}$ um entsprechende Konstanten: $d_{0,A} = 0, d_{1,A} = 1$.

   Und nun zu Eurer Aufgabe:

   (a) (3 Punkte) Stellt die Grundtermalgebra T_{Keller} auf.

   (b) (3 Punkte) Zeigt, daß genau ein Homomorphismus $h : T_{Keller} \to A$ existiert, indem ihr den Beweis zu Theorem 10.3.1 (Initialität der Grundtermalgebra) mit diesen Algebren konkret nachvollzieht.

   Dazu sollt ihr zuerst einen Homomorphismus $h : T_{Keller} \to A$ definieren, dann die Homomorphiebedingunen nachweisen und anschließend für jeden beliebigen Homomorphismus $g : T_{Keller} \to A$ zeigen, daß für alle $t \in T_{Keller,s}$ und $s \in S$ folgendes gilt:

   $$h_s(t) = g_s(t)$$

2. **Aufgabe (4 Punkte)**

   Sei $\Sigma = (S, OP)$ eine Signatur und $h : A \to B$ ein surjektiver Σ-Homomorphismus. Beweist, daß dann für jedes Operationssymbol $f : s_1 \dots s_n \to s$ in OP mit $n \geq 1$ gilt:

   $$f_B = h_s \circ f_A \circ (h_{s_1} \times \dots \times h_{s_n})^{-1}.$$

   Dabei sei $(h_{s_1} \times \dots \times h_{s_n})^{-1}$ die Umkehr**relation** zur Abbildung $h_{s_1} \times \dots \times h_{s_n} : A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n} \to B_{s_1} \times \dots \times B_{s_n}$ mit

   $$h_{s_1} \times \dots \times h_{s_n} \ (a_{s_1}, \dots, a_{s_n}) =_{def} h_{s_1}(a_1), \dots, h_{s_n}(a_n)$$

   für alle $(a_1, \dots, a_n) \in A_{s_1} \times \dots \times A_{s_n}$.

   Bemerkungen:

   (a) Ihr müßt zeigen, daß die Implementierung von f_B mit Hilfe von f_A "repräsentations-unabhängig" ist, d.h., daß die Relation $h_s \circ f_A \circ (h_{s_1} \times \dots \times h_{s_n})^{-1}$ tatsächlich eine totale Abbildung wird, die dann auch noch mit f_B übereinstimmt.

   (b) Um zu beweisen, daß die beiden Relationen f_B und $h_s \circ f_A \circ (h_{s_1} \times \dots \times h_{s_n})^{-1}$ übereinstimmen, könnt Ihr zeigen, daß für alle $(b_1, \dots, b_n) \in B_{s_1} \times \dots \times B_{s_n}$ die Anwendung von $h_s \circ f_A \circ (h_{s_1} \times \dots \times h_{s_n})^{-1}$ lediglich das Element $f_B(b_1, \dots, b_n) \in B_s$ liefert.

   (c) Die Aufgabe sieht vielleicht etwas schwer aus, ist aber in Wirklichkeit nur ein "Vier-Zeiler", der lediglich aus der systematischen Anwendung von Definitionen besteht.

   (d) Etwas allgemeiner formuliert zeigen wir damit, wie man aus einer Implementierung der Σ-Algebra A auch eine Implementierung der Σ-Algebra B gewinnen kann. (Natürlich nur unter der Voraussetzung, daß es von A nach B einen surjektiven Homomorphismus h gibt.)