Marco Kunze (`makunze@cs.tu-berlin.de`)
Sebastian Nowozin (`nowozin@cs.tu-berlin.de`)
Sebastian Russin (`srussin@cs.tu-berlin.de`)

SS 2002
27. 5. 2002

Lösungen zum 5. Übungsblatt zur Mafi II

Lösung zu Aufgabe 15:

Die Normalform der Ebene E hat die Form:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 | n \bullet x = 0\}, n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eines der parallelen Lichtbündel durchläuft den Endpunkt des Ortsvektors o, wodurch die Gerade g definiert wird:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir berechnen den Schnittpunkt zwischen der Geraden g und der Ebene E in zwei Schritten:

- Bestimmung von λ für den Schnittpunkt zwischen g und E

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 5 + \lambda\alpha &= 0 \\ \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda &= -\frac{5}{\alpha} \end{aligned}$$

  Für $\alpha = 0$ ist das Licht parallel zur Ebene, daher fällt kein Schatten des Ortsvektors o und es existiert kein Schnittpunkt.

- Bestimmung des Schnittvektors

$$s = o + \lambda c \Leftrightarrow s = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{10}{\alpha} \\ -\frac{15}{\alpha} \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{10}{\alpha} \\ -3 - \frac{15}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Länge des Schattens ist genau die Länge des Schnittvektors s:

$$|s| = \sqrt{\left(4 - \frac{10}{\alpha}\right)^2 + \left(-3 - \frac{15}{\alpha}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{80}{\alpha} + \frac{100}{\alpha^2} + 9 + \frac{90}{\alpha} + \frac{225}{\alpha^2}} = \sqrt{25 + \frac{10}{\alpha} + \frac{325}{\alpha^2}}$$

Lösung zu Aufgabe 16:

$\forall a, b \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i-b_i)^2}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 - 2a_ib_i + b_i^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(2a_i^2 + 2b_i^2\right) \\
&= 2\sum_{i=1} \left(a_i^2 + b_i^2\right) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\
&= 2\left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2\right) \\
&= 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 17:

(i) $\forall a, b \in \mathbb{R}^3$:

(a)

$$a \bullet (a \times b) = a \bullet \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 - a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 = 0$$

(b)

$$b \bullet (a \times b) = b \bullet \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3 + b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 = 0$$

Damit gilt $a \bullet (a \times b) = b \bullet (a \times b)$.

(ii) $b \in \mathbb{R}^3$ fest, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(a) = a \times b$. Gesucht: $(3,3)$-Matrix A, so dass $\forall x \in \mathbb{R}^3$: $F(x) = Ax$.

Es gilt:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 & a_{32}x_2 & a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

und

$$x \times b = \begin{pmatrix} x_2b_3 - x_3b_2 \\ x_3b_1 - x_1b_3 \\ x_1b_2 - x_2b_1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Matrix A erhält man durch Betrachtung der Koeffizienten der einzelnen Komponenten:

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 18:

(i) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$:

-
$$\begin{aligned} ((a \times b) \times c) \bullet d &= \left(\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times c \right) \bullet d \\ &= d_1\left((a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2\right) + \\ &\quad d_2\left((a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3\right) + \\ &\quad d_3\left((a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1\right) \\ &= a_3b_1c_3d_1 - a_1b_3c_3d_1 - a_1b_2c_2d_1 + a_2b_1c_2d_1 + \\ &\quad a_1b_2c_1d_2 - a_2b_1c_1d_2 - a_2b_3c_3d_2 + a_3b_2c_3d_2 + \\ &\quad a_2b_3c_2d_3 - a_3b_2c_2d_3 - a_3b_1c_1d_3 + a_1b_3c_1d_3 \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} (a \times b) \bullet (c \times d) &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c_2d_3 - c_3d_2 \\ c_3d_1 - c_1d_3 \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1) \\ &= a_2b_3c_2d_3 - a_2b_3c_3d_2 - a_3b_2c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 + \\ &\quad a_3b_1c_3d_1 - a_3b_1c_1d_3 - a_1b_3c_3d_1 + a_1b_3c_1d_3 + \\ &\quad a_1b_2c_1d_3 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1 \end{aligned}$$

Bei genauerem hinsehen stellen wir fest: Die beiden Terme sind gleich, und damit der Beweis geglückt.

(ii)

$$\begin{aligned} & (a \times b) \times (c \times d) \\ = & \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] \times \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \right] \\ = & \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2d_3 - c_3d_2 \\ c_3d_1 - c_1d_3 \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (a_3b_1 - a_1b_3)(c_1d_2 - c_2d_1) - (a_1b_2 - a_2b_1)(c_3d_1 - c_1d_3) \\ (a_1b_2 - a_2b_1)(c_2d_3 - c_3d_2) - (a_2b_3 - a_3b_2)(c_1d_2 - c_2d_1) \\ (a_2b_3 - a_3b_2)(c_3d_1 - c_1d_3) - (a_3b_1 - a_1b_3)(c_2d_3 - c_3d_2) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a_3b_1c_1d_2 - a_3b_1c_2d_1 - a_1b_3c_1d_2 + a_1b_3c_2d_1 - a_1b_2c_3d_1 + a_1b_2c_1d_3 + a_2b_1c_3d_1 - a_2b_1c_1d_3 \\ a_1b_2c_2d_3 - a_1b_2c_3d_2 - a_2b_1c_2d_3 + a_2b_1c_3d_2 - a_2b_3c_1d_2 + a_2b_3c_2d_1 + a_3b_2c_1d_2 - a_3b_2c_2d_1 \\ a_2b_3c_3d_1 - a_2b_3c_1d_3 - a_3b_2c_3d_1 + a_3b_2c_1d_3 - a_3b_1c_2d_3 + a_3b_1c_3d_2 + a_1b_3c_2d_3 - a_1b_3c_3d_2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a_2b_1c_3d_1 - a_3b_1c_2d_1 + a_3b_1c_1d_2 - a_2b_1c_1d_3 - a_1b_2c_3d_1 + a_1b_3c_2d_1 - a_1b_3c_1d_2 + a_1b_2c_1d_3 \\ -a_3b_2c_2d_1 + a_3b_2c_1d_2 - a_1b_2c_3d_2 + a_1b_2c_2d_3 + a_2b_3c_2d_1 - a_2b_3c_1d_2 + a_2b_1c_3d_2 - a_2b_1c_2d_3 \\ a_2b_3c_3d_1 - a_1b_3c_3d_2 + a_1b_3c_2d_3 - a_2b_3c_1d_3 - a_3b_2c_3d_1 + a_3b_1c_3d_2 - a_3b_1c_2d_3 + a_3b_2c_1d_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_3d_1 - a_3b_1c_2d_1 + a_3b_1c_1d_2 - a_1b_1c_3d_2 + a_1b_1c_2d_3 - a_2b_1c_1d_3 \\ a_2b_2c_3d_1 - a_3b_2c_2d_1 + a_3b_2c_1d_2 - a_1b_2c_3d_2 + a_1b_2c_2d_3 - a_2b_2c_1d_3 \\ a_2b_3c_3d_1 - a_3b_3c_2d_1 + a_3b_3c_1d_2 - a_1b_3c_3d_2 + a_1b_3c_2d_3 - a_2b_3c_1d_3 \end{pmatrix} - \\
&\quad \begin{pmatrix} a_1b_2c_3d_1 - a_1b_3c_2d_1 + a_1b_3c_1d_2 - a_1b_1c_3d_2 + a_1b_1c_2d_3 - a_1b_2c_1d_3 \\ a_2b_2c_3d_1 - a_2b_3c_2d_1 + a_2b_3c_1d_2 - a_2b_1c_3d_2 + a_2b_1c_2d_3 - a_2b_2c_1d_3 \\ a_3b_2c_3d_1 - a_3b_3c_2d_1 + a_3b_3c_1d_2 - a_3b_1c_3d_2 + a_3b_1c_2d_3 - a_3b_2c_1d_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_2c_3d_1 - a_3c_2d_1 + a_3c_1d_2 - a_1c_3d_2 + a_1c_2d_3 - a_2c_1d_3) \cdot b - \\
&\quad (b_2c_3d_1 - b_3c_2d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 + b_1c_2d_3 - b_2c_1d_3) \cdot a \\
&= \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ a_3c_1 - a_1c_3 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} \bullet d \cdot b - \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \bullet d \cdot a \\
&= (a \times c) \bullet d \cdot b - (b \times c) \bullet d \cdot a
\end{aligned}
$$

Lang aber bewiesen.