Technische Universität Berlin
Prof. J. Gärtner
R. Dahms

WS 2001/2002
17. 12. 2001

9. Übungsblatt zur Mafi I

Aufgabe 32: Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x^3+1}{x}$.

(a) Zeigen Sie, daß sich f für betragsmäßig große x wie x^2 verhält, in dem Sinne, daß $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x^2) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x^2) = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß sich f in der Nähe von 0 wie $\frac{1}{x}$ verhält, in dem Sinne, daß $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - \frac{1}{x}) = 0$ ist.

(c) Fertigen Sie **eine gemeinsame** Skizze der Graphen der Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x^2$ und $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := \frac{1}{x}$ an.
Ergänzen Sie anschließend diese Skizze durch den Graphen von f in Relation zu g und h, ohne einzelne Punkte von f zu berechnen.

5 Punkte

Aufgabe 33: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a)\quad \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-4}{|x-2|} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-4}{|x-2|}$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right) \qquad\qquad (d)\quad \lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - 12x^2 - 18x + 28}{x^3 - 4x^2 - 37x + 40}.$$

1+1+1+2 Punkte

Aufgabe 34: Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) := \frac{(1-x)^4(x-3)}{x^2+2x+7}$$

stetig (in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches) ist. Begründen Sie jeden Ihrer Schritte.
Hierzu darf verwendet werden:

(i) Sind die Funktionen f und g stetig, so sind (falls wohldefiniert) die Funktionen $f+g$, $f \cdot g$ und $f \circ g$ stetig.

(ii) Konstante Abbildungen $g_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_c(x) := c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ sind stetig.

(iii) Die identische Abbildung $id\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{id}(x) := x$ ist stetig.

(iv) Die Abbildung $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig.

5 Punkte

Aufgabe 35: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 7 - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 5 + \frac{\beta}{x}}\,, & x \neq 0, \\ \alpha\,, & x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (-\infty, 4]$ die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist.
Hinweise: Es gelten $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$, und $\sqrt{x^2} = |x|$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

5 Punkte

Abgabe: Spätestens zu Beginn der Übung am 09. 01. 2002.

Weitere Informationen zur Vorlesung sind unter **www.math.tu-berlin.de/~mafi1** zu finden.